MATEMÁTICA 3° A

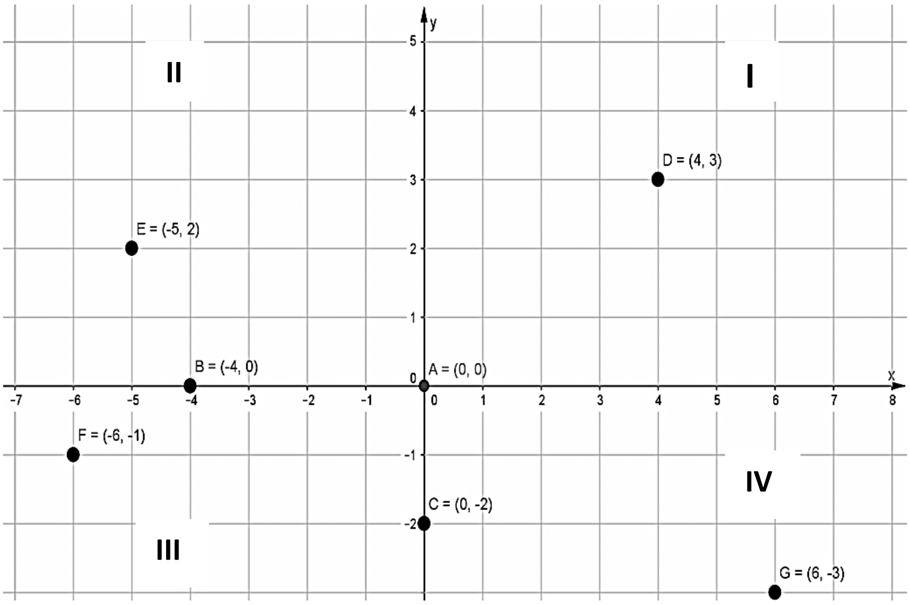
UNIDAD III

FUNCIONES

CONCEPTO. ELEMENTOS DE ANÁLISIS

SISTEMA DE EJES CARTESIANOS. REPRESENTACIÓN DE PUNTOS.

Los **ejes cartesianos** son dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto denominado **origen de coordenadas**. La recta horizontal recibe el nombre de **eje de abscisas** (eje x), y la recta vertical, **eje de ordenadas** (eje y). Cada **punto** queda determinado por un **par ordenado (x; y)**, donde el primer valor representa la abscisa y el segundo, la ordenada.



El plano queda dividido en cuatro **cuadrantes**. Estos se numeran en sentido antihorario.

$$D \in \ I\ cuadrante$$

$$F \in \ III\ cuadrante$$

RELACIÓN. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una **relación** entre dos conjuntos numéricos A y B, es un conjunto de **pares ordenados (x; y)**, con la condición de que **x** pertenece a **A** e **y** pertenece a **B.**

En símbolos: $R: A \to B / x \in A \ \wedge \ y \in B$

Ejemplo: $A = \{0; 1; 2\} \quad y \quad B = \{3; 4; 5; 6\}$

Escribimos tres posibles relaciones entre ambos conjuntos:

$R_1 = \{(0;3), (0;4), (1;5), (2;6)\}$ $\qquad$ $R_2 = \{(1;3), (2;5)\}$ $\qquad$ $R_3 = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

Actividad

a) *Escribir* R_4 *y* R_5
b) *Representar todas las relaciones en el plano cartesiano (una por plano).*

Una relación es una **función** si cumple dos condiciones:

1. Existencia: **Todos** los elementos del conjunto A están relacionados con algún elemento del conjunto B.
2. Unicidad: Cada elemento del conjunto A se relaciona con **único** elemento de B.

En $R_3 = \{(0;5),(1;6),(2;3)\}$ todos los elementos de A se relacionan con un único elemento de B, por lo tanto, **es función.**

Entonces: $f: A \to B / f = \{(0;5),(1;6),(2;3)\}$

$$f(x) = y \begin{cases} f(0) = 5 \to 5\ es\ la\ "imagen"\ de\ 0 \quad y\ \ 0 \quad es\ la\ "preimagen"\ de\ 5 \\ f(1) = 6 \to 6\ es\ la\ "imagen"\ de\ 1 \quad y\ \ 1 \quad es\ la\ "preimagen"\ de\ 6 \\ f(2) = 3 \to 3\ es\ la\ "imagen"\ de\ 2 \quad y\ \ 2 \quad es\ la\ "preimagen"\ de\ 3 \end{cases}$$

Variables: Dado el par ordenado (x; y), la **"x" es la variable independiente** y la **"y" es la variable dependiente**.

En el ejemplo, tomamos los conjuntos A y B, que son conjuntos finitos. En adelante, trabajaremos con el conjunto de los **números reales (ℝ),** o subconjuntos de él, o sea, **intervalos reales**.

Una función puede representarse de varias maneras: como conjunto de pares ordenados, un diagrama de Venn, a través de una tabla, una fórmula o un gráfico.

Elementos de análisis en una función

- ***Dominio***: El dominio de una función (o conjunto de partida) es el conjunto de todos los valores x que puede tomar la variable independiente**.** Se simboliza ***Dom f.***

  En el ejemplo: $Dom\ f = A = \{0,1,2\}$

- ***Imagen***: es el conjunto de todos los valores que toma la variable y, obteniéndose al aplicar la función a los elementos del dominio. Se denota ***Im f***

  En el ejemplo: $Im\ f = \{3,5,6,\}$

- Los ***ceros o raíces*** de una función son aquellos valores del **dominio** para los cuales la función se anula, es decir los x tales que f(x) = 0. Al conjunto de ceros se lo simboliza C^0 y los valores se enumeran entre llaves. En el gráfico, son los puntos de intersección de la curva con el eje de abscisas.

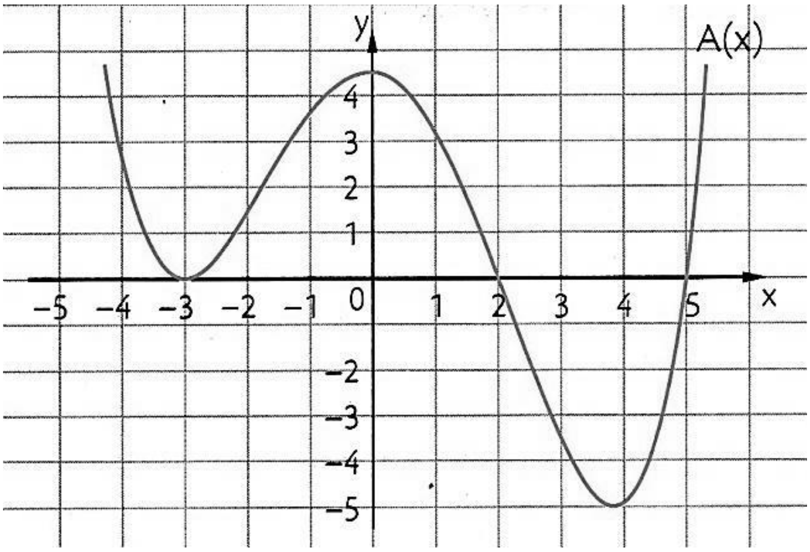
- El ***conjunto de positividad*** de una función está integrado por los valores del **dominio** para los cuales la función es positiva, o sea y es positiva. En otras palabras $f(x) > 0$. Se simboliza C^+ y se indican con intervalos abiertos, o sea que se utilizan paréntesis. En el gráfico, este conjunto indica la región del eje x donde la curva está por encima del mismo.

- El ***conjunto de negatividad*** de una función está integrado por los valores del **dominio** para los cuales la función es negativa, o sea y es negativa. En otras palabras $f(x) < 0$. Se simboliza C^- y se indican con intervalos abiertos, o sea con paréntesis. En el gráfico, este conjunto indica la región del eje x donde la curva está por debajo del mismo.

- El ***Intervalo de crecimiento*** de una función está integrado por los valores del **domino**, para los cuales ambas variables crecen. Es decir, dados dos valores x_1 , x_2 se verifica que:

- El ***Intervalo de decrecimiento*** de una función está integrado por los valores del **domino**, para los cuales ambas variables decrecen. Es decir, dados dos valores x_1 , x_2 se verifica que:
- La ***ordenada al origen***: es el valor de la imagen que le corresponde a x = 0. Se simboliza $f(0) = y$

Ejemplo:



$Dom\ f(x) =$...

$Im\ f(x) =$...

$C^0 =$...

$C^+ =$...

$C^- =$...

$f(0) =$...

$I \uparrow =$...

$I \downarrow =$...

$I\ Cte =$...

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

1)

Se define $R: A \to B \ \wedge \ A = \{1;2;4;5\} \ \wedge \ B = \{0;1;3;5;7\}$

Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar la respuesta.

a)

x	y
1	0
2	1
2	3
4	5

b)

x	y
2	7
4	1
5	3
1	0

c)

x	y
1	3
2	1
5	5

d)

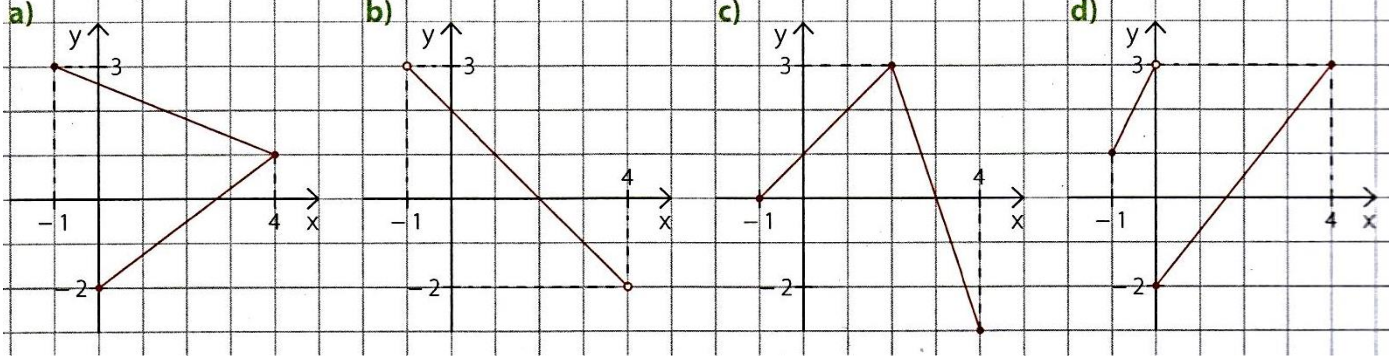
x	y
5	1
1	1
4	1
2	1

e)

x	y
1	0
1	1
1	3
1	5
1	7

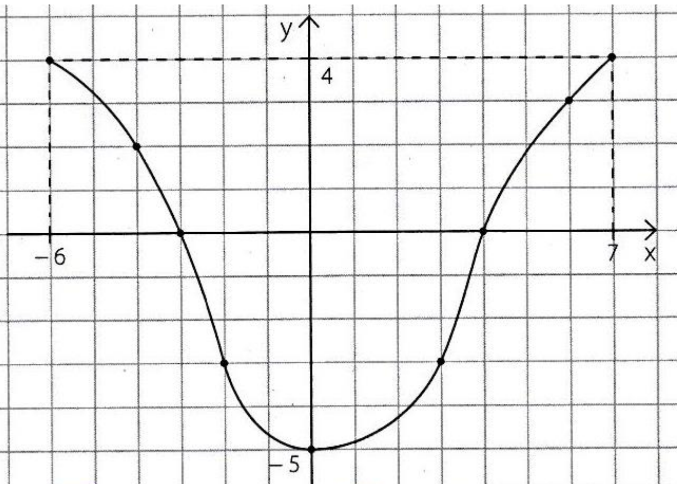
Se define $R: A \to B \ \wedge \ A = [-1;4] \ \wedge \ B = [-2;3]$

Indicar si los siguientes gráficos corresponden o no a funciones y justificar la respuesta.



2)

Observar el gráfico y responder.



a) ¿Cuál es la imagen de − 6?

b) ¿Y cuál la de 6?

c) ¿Cuál es la preimagen de − 3?

d) ¿Y cuál la de 2?

e) ¿En qué valores de x la función vale 0?

f) ¿En qué valor de y el valor de x es 0?

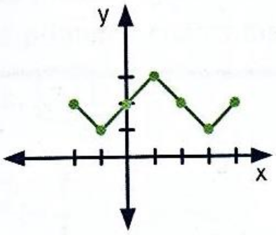
g) Dar dos valores de x con la misma imagen.

Completar según corresponda.

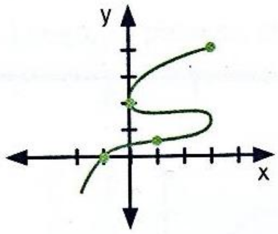
h) $f(3) = \square$ **i)** $f(\square) = 4$ **j)** $f(2) = \square$ **k)** $f(\square) = 3$

4. Coloquen una X en las gráficas que corresponden a una función.

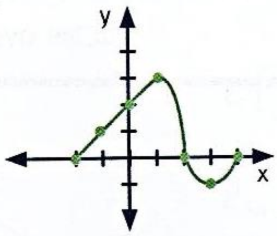
a.



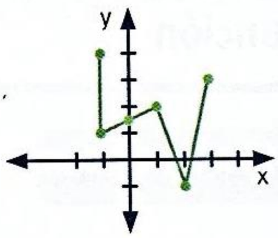
b.



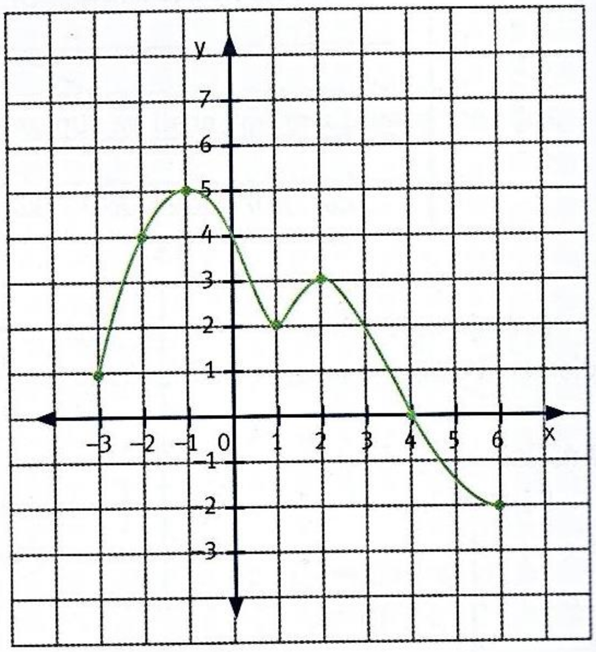
c.



d.



5. Observen el gráfico y respondan.



a. ¿Cuál es el dominio? ¿Y la imagen?

____

b. ¿Cuál es la imagen de −2? ¿Y la preimagen de 5?

____

c. ¿El punto (1;2) pertenece a la función?

____

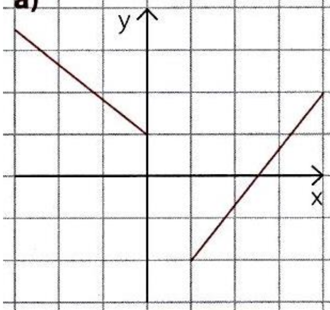
d. Completen.

- Cero o raíz: $\square$
- Máximo: $\square$
- Mínimo: $\square$
- Intervalo de crecimiento: $\square$
- Intervalo de decrecimiento: $\square$

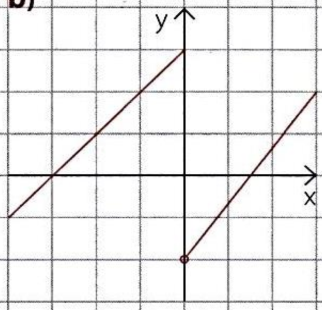
6)

Indicar si las siguientes relaciones, $R:\Re \to \Re$, son funciones y justificar.

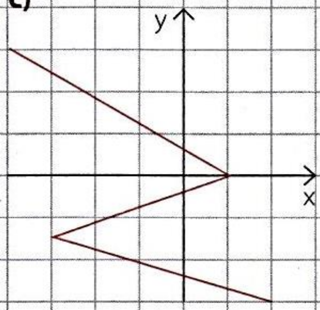
a)



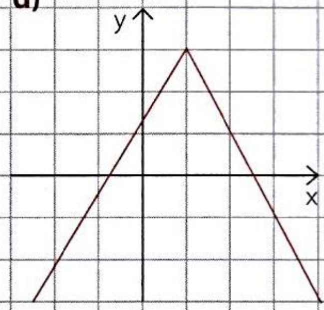
b)



c)

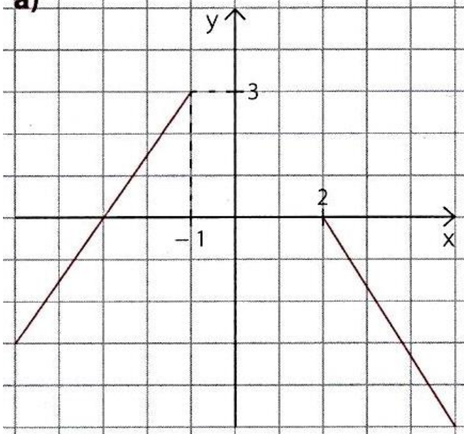


d)

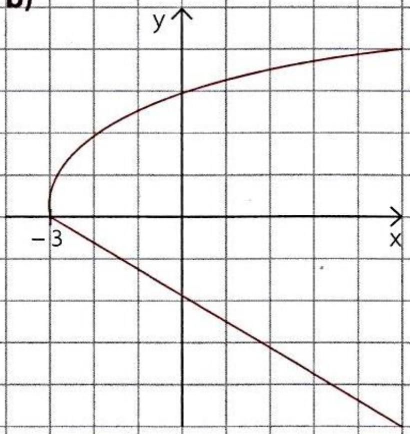


Escribir un dominio y una imagen adecuados para que las siguientes relaciones sean funciones.

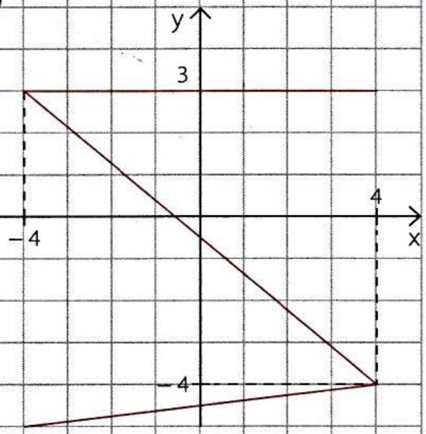
a)



b)



c)



Observar el gráfico de la función y responder.

a) ¿Cuáles son las raíces?

b) ¿Cuál es la imagen de – 5?

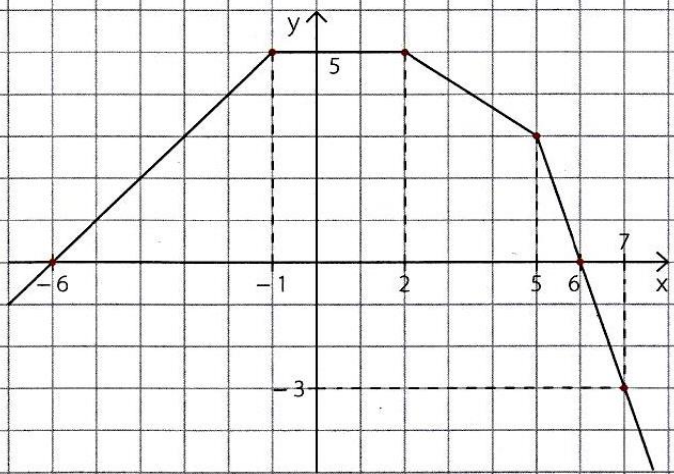
c) ¿Y cuál la de 0?

d) ¿Cuál es la preimagen de 4?

e) ¿Y cuál la de – 3?

f) ¿En qué valores de x la función vale 3?

g) Dar tres valores de x con la misma imagen.



Colocar >, < o = según corresponda.

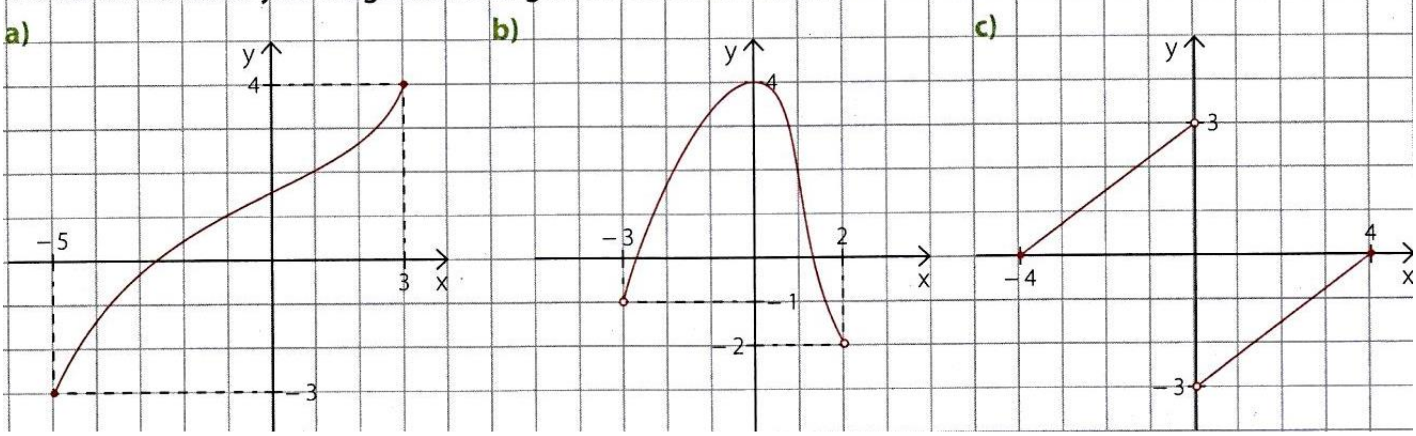
h) f(– 2) ☐ f(3) **k)** f(5) ☐ f(4)

i) f(0) ☐ f(2) **l)** f(6) ☐ f(– 6)

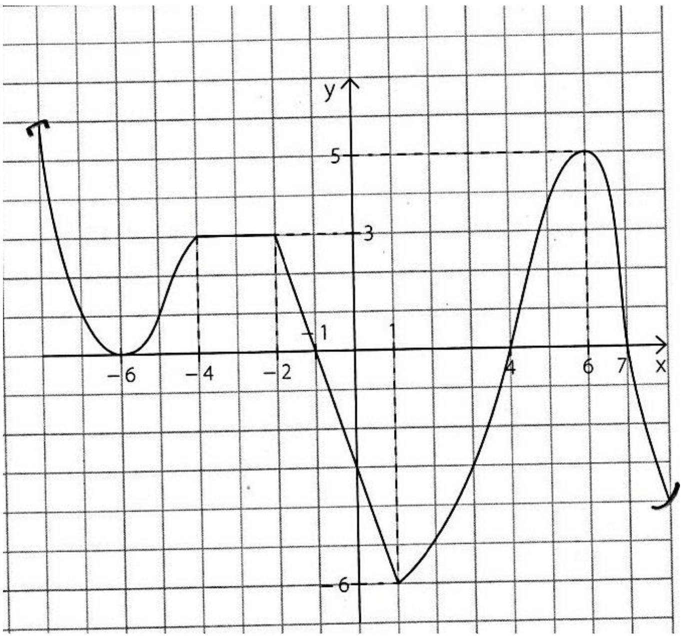
j) f(– 1) ☐ f(– 2) **m)** f(– 3) ☐ f(– 4)

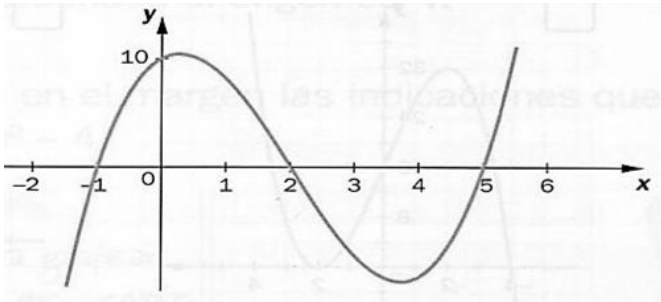
7)

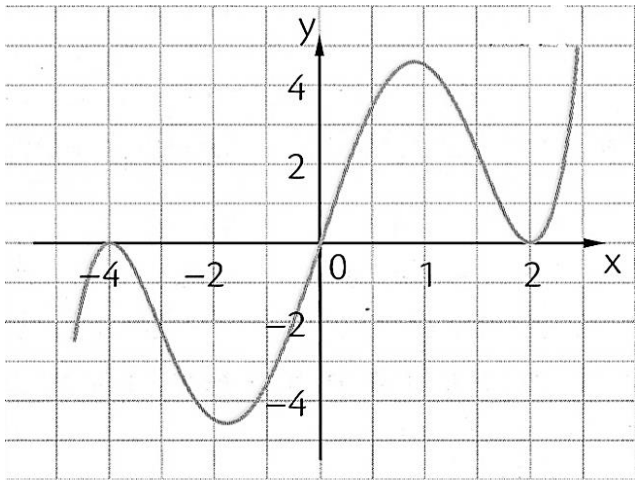
Escribir el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

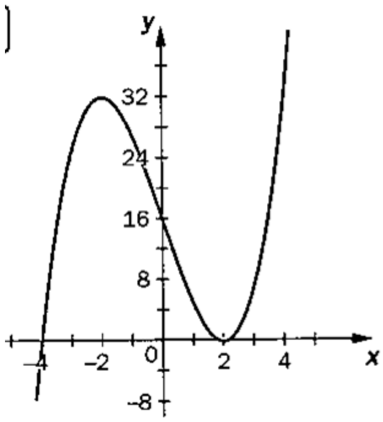


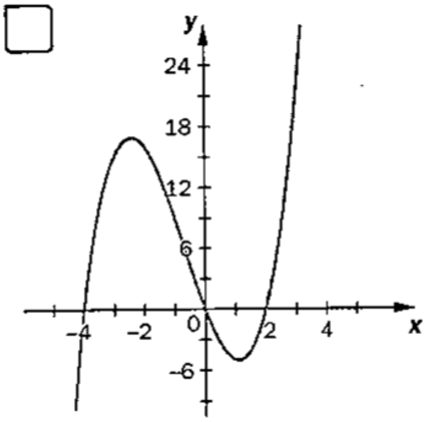
8) Observar los gráficos y realizar un análisis completo de cada uno.

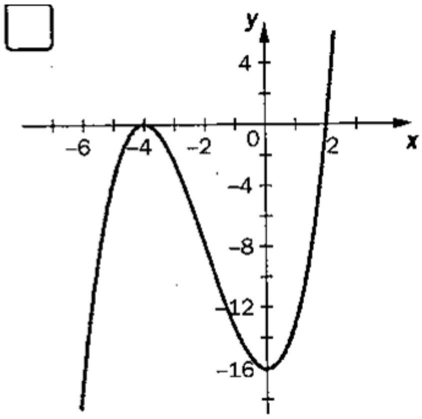


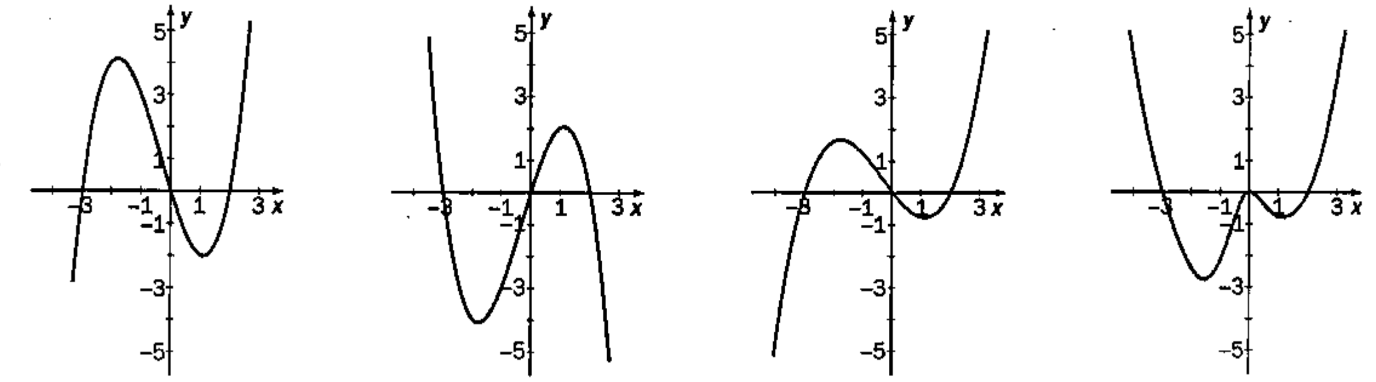












9) Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

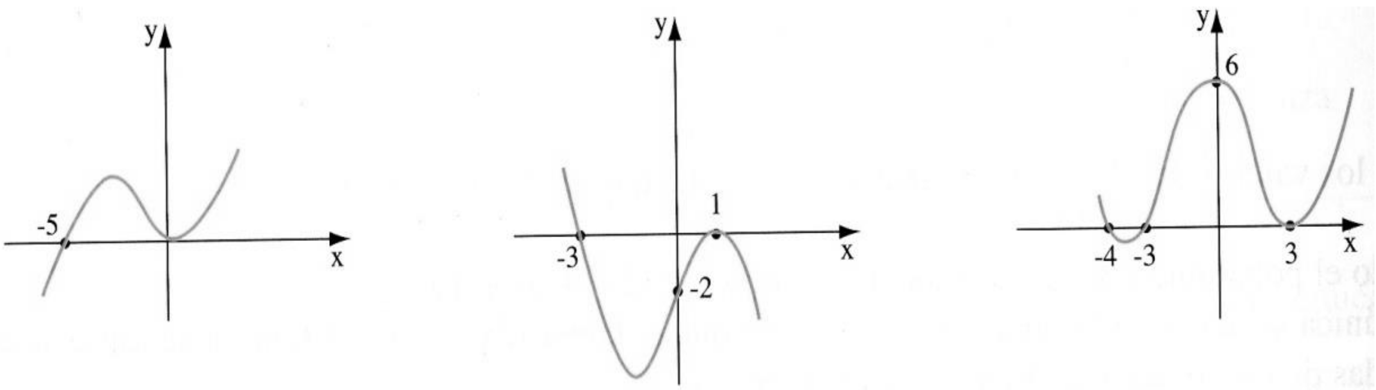
$a)\ f(-2) = 0$
$f(3) = 0\ \ y$
$f(0) < 0$

$b)\ \ C^0 = \{-3; 0; 4\}$
$f(-7) => 0 >\ \ y$
$f(2) => 0$

$c)\ \ f(-1) = 0$
$f(2) = 0\ y$
$C^+ = \emptyset$

$d)\ I \uparrow = (-\infty; -4) \cup (0; 5)$
$I\ Cte = (-4; -1)$
$f(0) = -3\ \ y\ \ f(7) = 0$
$P(5; 3) \in\ \ f(x)$

10) Escribir 4 proposiciones verdaderas y 2 falsas de cada una de las funciones representadas.



FUNCIONES QUE SE EXPRESAN MEDIANTE FÓRMULAS

Algunas funciones tienen asociada una fórmula que sirve para calcular cada valor de "y" a partir del correspondiente valor de "x". La variable "y" es la (o sea depende del valor asignado a la x); por eso la "x" se elige y la "y" se calcula.

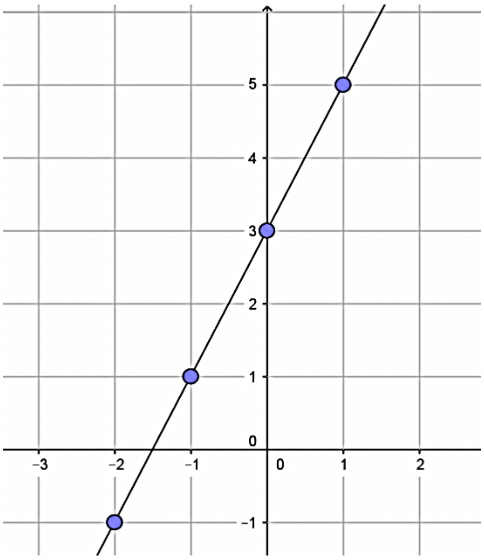
$$\boldsymbol{y = f(x) \quad se\ lee\ "y\ es\ funci\acute{o}n\ de\ x"}$$

Ejemplo: La fórmula $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$, significa que la función asigna a cada valor de "x", un valor de "y" que se obtiene multiplicando a la "x" por dos y sumándole tres.

Tabla de valores: se asigna cualquier valor a la variable independiente, se hacen los cálculos y se obtiene el valor de la variable dependiente correspondiente

x	$\boldsymbol{2x + 3 = y}$	
0	$2.\mathbf{0} + 3 = 3$	→ Par ordenado (0; 3)
1	$2.\mathbf{1} + 3 = 5$	
2	$2.\mathbf{2} + 3 = 7$	
-1	$2.(\mathbf{-1}) + 3 = 1$	
-2	$2.(\mathbf{-2}) + 3 = -1$	
-3	$2.(\mathbf{-3}) + 3 = -3$	→ Par ordenado (-3; -3)

Representación gráfica de la función



Se llevaron al plano cartesiano algunos puntos de la tabla de valores y quedó representada la función con una recta, en este caso.

Las representaciones pueden ser rectas o curvas, depende de la fórmula de la función.

Cuando un punto pertenece a la función, quiere decir que se cumple la igualdad dada en la fórmula; por ejemplo:

El punto $\mathbf{(1;5)} \in \boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$ porque cuando la x = 1 se obtiene y = 5; en cambio el punto $\mathbf{(-1;3)} \notin \boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$ porque cuando la x = -1 se obtiene y = 1.

TRABAJO PRÁCTICO N°2

1) Para cada una de las siguientes funciones, realizar una tabla de valores, graficar y realizar el análisis completo.

$a)\ y = 5x - 3$ $\quad b)\ f(x) = x^2 + 1$ $\quad c)\ y = -3x + 4$ $\quad d)\ f(x) = x^3 + x$ $\quad e)\ y = \frac{1}{2}x + 1$

$f)\ 2x - x^2$ $\quad g)\ f(x) = 2x^2 - 4x$ $\quad h)\ f(x) = x^3 + 2x^2$ $\quad i)\ f(x) = -3x + \frac{5}{2}$

2) Indicar V (verdadero) o F (falso) y justificar la respuesta.

a) El punto P=(-1; 2) pertenece a la función $y = \frac{x+5}{3}$

b) $Q = (-2;-7) \notin f(x) = -2x - 11$

c) M=(-4; 6) verifica la expresión $\frac{-3x}{2} = y$

d) Si el punto $\left(\frac{3}{4};-1\right)$ *pertenece a la función* $y = -4(-kx+1)$, *entonces* $k = \frac{3}{5}$

3) En un curso de manejo, cada hora de clase cuesta $300

a) Hallar una fórmula que permita calcular el valor de un curso en función de la duración en horas.

b) Graficar la función

c) ¿Cuál es el costo de un curso de 12 horas?

d) ¿Cuántas horas de clase dura un curso cuyo valor es $ 5.100?

e) El punto (11; 3200) ¿pertenece a la función?

4) El perímetro de un paralelogramo abcd es de 24 cm.

a) ¿Qué relación existe entre $\overline{ab}$ y $\overline{ad}$?

b) Completar la tabla:

$\overline{ab}$ en cm	8			10,5		x
$\overline{ad}$ en cm		4,5	7		3	

c) ¿Cuáles son los valores reales que puede tomar $\overline{ab}$?¿ $\overline{ad}$?

d) Realizar el gráfico correspondiente.

5) Miguel es técnico de computadoras. Cuando le piden un servicio a domicilio, cobra un valor fijo de $300 y un adicional de $150 por hora de trabajo.

a) Completar la tabla y encontrar la fórmula de la función que relaciona el costo **(C)** de un trabajo en función del tiempo empleado **(t),** por un trabajo a domicilio.

Tiempo (hs)	½	1	1,5	2	3	4
Costo ($)						

b) Representar gráficamente **C(t).** ¿Cuál es la variable independiente?

c) ¿Cuántas horas trabajó en un arreglo que cobró $ 1.275?

d) ¿Cuál es el costo de una reparación que insume 2 horas y media?